Exercice x

Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendants.

Soit A une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivement.

Soit B une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de B associés aux valeurs propres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivement.

Montrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable et satisfait

$$\det(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n) .$$